



UNIVERSIDAD DEL ZULIA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA



MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

# Líneas de transmisión de energía eléctrica

Profa. Josimar Tello  
[jtello@fing.luz.edu.ve](mailto:jtello@fing.luz.edu.ve)

Última actualización: 8 de Octubre de 2016

## Contenido

- Introducción
- Modelo general de las líneas de transmisión
- Parámetros eléctricos de las líneas de transmisión
- Cálculo de los parámetros eléctricos
- Operación de una línea de transmisión en estado estable
- Flujo de potencia en una línea de transmisión
- Transitorios en líneas de transmisión
- Conclusiones

## Introducción

- Con el crecimiento de la demanda energética a lo largo del tiempo, se hizo necesaria la transmisión de la energía producida en grandes centros de generación hacia los centros de consumo.
- La tendencia hacia la transmisión de energía eléctrica en alta tensión se debe al crecimiento de la capacidad de las líneas mientras se reducen las pérdidas por unidad de potencia transmitida.



Fuente: Poughkeepsie Journal archive (2015)

## Introducción

- Inicialmente los conductores empleados en líneas de transmisión eran de cobre. Actualmente, se emplean en su mayoría conductores de aluminio.

### ACSR

Conductor de aluminio  
reforzado con acero  
(Aluminium Conductor  
Stell Reinforced)

### AAC

Conductores de aluminio  
(All Aluminium  
Conductors)

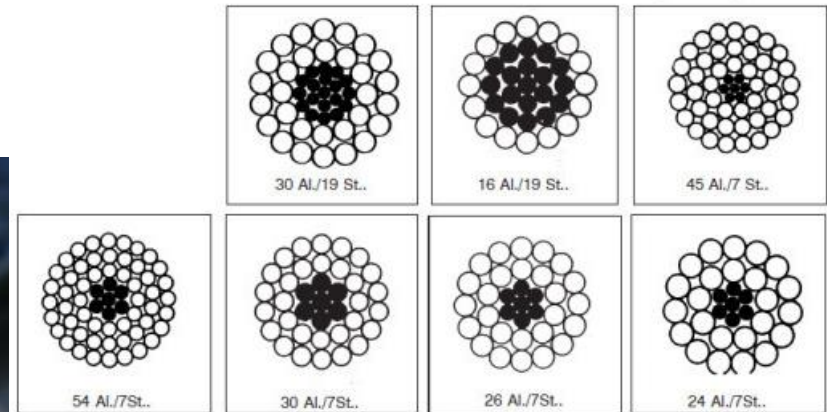
### AAAC

Conductores de aleación  
de aluminio  
(All Aluminium Alloy  
Conductors)

Conductores con cubierta  
de aluminio  
(Alluminium Clad  
Conductors - Alumoweld)

Conductores de Acero

# Introducción



## Modelo General de las Líneas de Transmisión

- La transmisión de energía eléctrica se puede hacer de distintas maneras:
  - Conducción: cuando existe un medio que conduzca la energía a través de una corriente que se transmite por su estructura molecular.
  - Acoplamiento: mediante un campo eléctrico o magnético.
  - Radiación: mediante ondas electromagnéticas, no se necesita un medio para transmitirse y además se realiza a frecuencias muy altas.
- En una línea, se busca realizar la transmisión por conducción. Sin embargo, no se puede evitar totalmente la transferencia de energía por acoplamiento o por radiación.

# Ecuaciones de Maxwell (1)

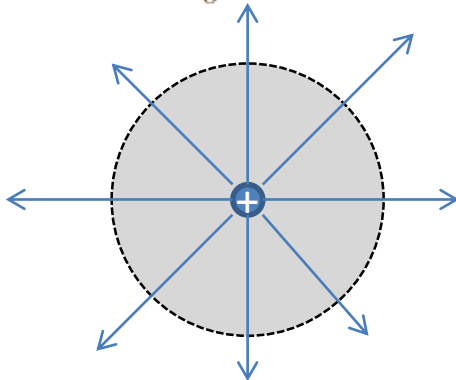
## Ley de Gauss para campos eléctricos

Integral form

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} = 4\pi kq$$

Differential form

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 4\pi k\rho$$



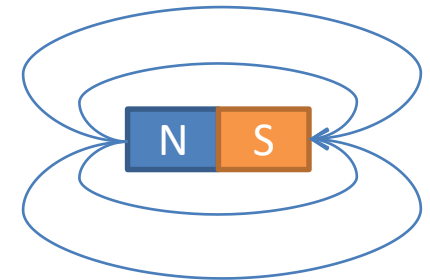
## Ley de Gauss para campo magnético

Integral form

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Differential form

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

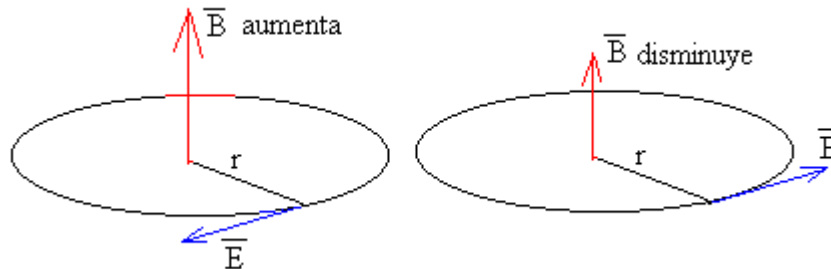


Fuente: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/electric/maxeq2.html#c1>



## Ecuaciones de Maxwell (2)

- Ley de Faraday



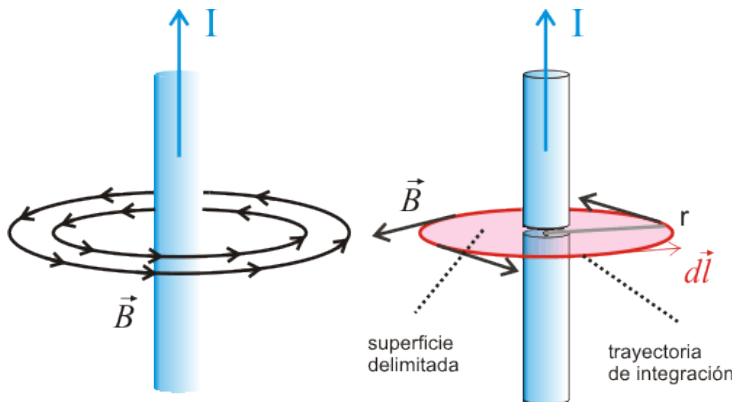
Integral form

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Differential form

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- Ley de Ampere



Integral form

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

Differential form

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi k}{c^2} \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

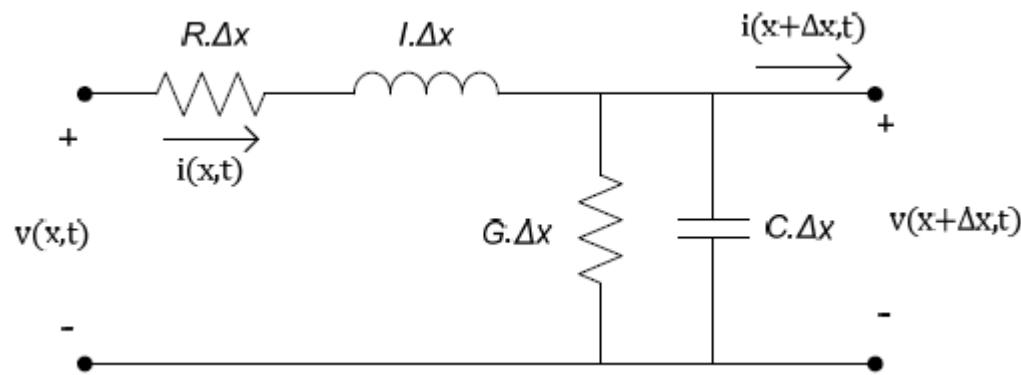
$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\vec{J}}{\epsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Fuente: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/electric/maxeq2.html#c1>



## Modelo General de las Líneas de Transmisión

- En 1880 Olivier Heaveside publica los primeros estudios matemáticos sobre líneas de transmisión. Utiliza las ecuaciones de Maxwell aplicadas a líneas telegráficas.
- La teoría de Heaviside se aplica a líneas de transmisión de todo tipo. En ella, se describe cada línea a través de una serie de parámetros distribuidos por unidad de longitud.



## Modelo General de las Líneas de Transmisión

- Para la caracterización y el análisis de las líneas de transmisión hay que recordar que un sistema de potencia eléctrica trabaja en frecuencias bajas (50-60Hz), que pueden considerarse como cuasi estacionarias.
- Una corriente se considera cuasi estacionaria cuando la densidad de corriente por todo el material es prácticamente constante. Esta consideración depende de la longitud de la línea en comparación con la longitud de onda.

$$\begin{array}{lcl}
 \lambda = \frac{c}{f} & \text{Para } f = 60\text{Hz} & \\
 \lambda \gg l_c & \Rightarrow & \lambda = \frac{c}{f} = \frac{300000 \text{ km/s}}{60\text{Hz}} = 5000\text{km} \\
 \lambda > 20l_c & & \Rightarrow \begin{array}{l} l_c < \frac{\lambda}{20} \\ l_c < 250\text{km} \end{array}
 \end{array}$$

## Modelo General de las Líneas de Transmisión

- Líneas largas: aquellas con longitudes mayores a 150 millas o 240 kilómetros. Se deben modelar mediante parámetros distribuidos ya que se sabe que la densidad de corriente no es totalmente constante a lo largo de la línea.
- Líneas medias: longitudes entre 80 y 240 kilómetros (50-150 millas). Gracias a ciertas aproximaciones se pueden representar con modelos de parámetros concentrados.
- Líneas cortas: longitudes menores a 80 kilómetros o 50 millas. En estos casos se puede despreciar el efecto capacitivo en derivación sin introducir grandes errores.

# Contenido

- Introducción
- Modelo general de las líneas de transmisión
- Parámetros eléctricos de las líneas de transmisión
- Cálculo de los parámetros eléctricos
- Operación de una línea de transmisión en estado estable
- Flujo de potencia en una línea de transmisión
- Transitorios en líneas de transmisión
- Conclusiones

## Parámetros eléctricos de las líneas de transmisión

- Cada uno de los parámetros eléctricos que describen la línea de transmisión sirven para modelar los distintos fenómenos que tienen lugar en la transferencia de energía eléctrica.
  - Resistencia  $R(\text{Ohm/m})$ : representa la pérdida en energía conducida.
  - Conductancia  $G(\text{S/m})$ : representa la pérdida en la corriente que puede llegar a fluir entre los conductores.
  - Inductancia  $L(\text{H/m})$ : esta asociada con la energía almacenada en forma de campo magnético. Representa la dificultad para incrementar o disminuir el flujo de corriente por el conductor.
  - Capacitancia  $C(\text{F/m})$ : se asocia con el almacenamiento de energía en forma de campo eléctrico. Representa la atracción o repulsión que existe entre los electrones que se encuentran separados por un medio aislante.

# Contenido

- Introducción
- Modelo general de las líneas de transmisión
- Parámetros eléctricos de las líneas de transmisión
- Cálculo de los parámetros eléctricos
- Operación de una línea de transmisión en estado estable
- Flujo de potencia en una línea de transmisión
- Transitorios en líneas de transmisión
- Conclusiones

## Cálculo de los parámetros eléctricos (1)

### Resistencia

- La resistencia efectiva de un conductor en corriente alterna se calcula como:

$$R_{ac} = \frac{P_{loss}}{I^2}$$

$P_{loss}$  : pérdida de potencia activa en el conductor

$I$  : corriente que circula por el conductor

- La resistencia efectiva en corriente alterna es igual a la resistencia en corriente directa siempre que la distribución de corriente en el material sea uniforme.



## Resistencia (1)

- La resistencia de corriente directa de un conductor se calcula como:

$$R_{cd} = \frac{\rho l}{A} \text{ } [\Omega]$$

$$R_{cd} = \frac{\rho}{A} \text{ } [\Omega.m]$$

$\rho$  : resistividad del material

$l$  : longitud del conductor

$A$  : area transversal del conductor

El área transversal se puede expresar en milímetros cuadrados o en circular mils

$$1 \text{ kcmil} \cong 0,5067 \text{ mm}^2$$

$$2 \text{ kcmil} \approx 1 \text{ mm}^2$$

Resistividad del cobre recocido:

$$\rho = 1,72 \times 10^{-8} \Omega.m$$

Resistividad del cobre estirado al frío:

$$\rho = 1,77 \times 10^{-8} \Omega.m = 10,66 \Omega.\text{cmil}/\text{pie}$$

Resistividad del aluminio:

$$\rho = 2,83 \times 10^{-8} \Omega.m = 10,66 \Omega.\text{cmil}/\text{pie}$$

## Resistencia (2)

- La resistencia efectiva del conductor se ve modificada por los siguientes efectos:

### Trenzado del conductor

- La resistencia de corriente directa de los conductores trenzados es mayor, porque la colocación en espiral de los hilos los hace mas largo que el conductor en sí.

### Temperatura

- La variación de la resistencia con la temperatura es prácticamente lineal dentro del rango normal de operación.

### Efecto piel

- Conforme se aumenta la frecuencia de la corriente que circula por el conductor, la distribución de corriente por su área transversal se hace menos uniforme.

### Conductores magnéticos

- Para conductores magnéticos, tales como los de acero empleados para cables apantallados, la resistencia depende de la magnitud de la corriente. Las perdidas magnéticas dependen de la magnitud de la corriente.

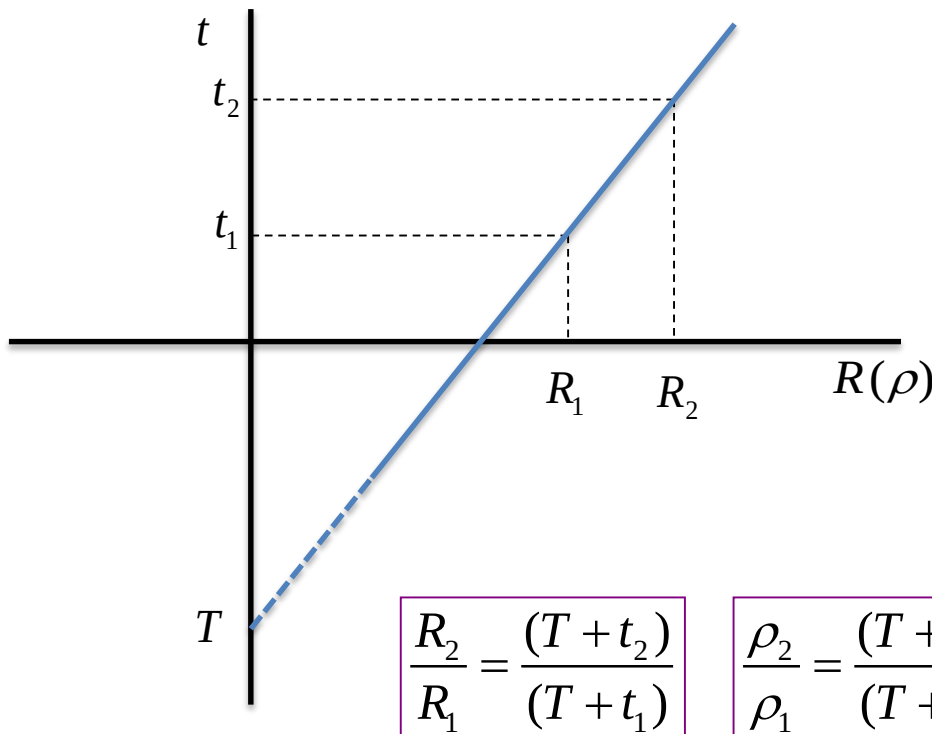
## Resistencia (3)

| Material   | % Conductivity | $\rho_{20^{\circ}\text{C}}$     |                         | T                    |
|------------|----------------|---------------------------------|-------------------------|----------------------|
|            |                | Resistivity at 20 °C            |                         | Temperature Constant |
|            |                | $\Omega\text{m} \times 10^{-8}$ | $\Omega\text{-cmil/ft}$ | °C                   |
| Copper:    |                |                                 |                         |                      |
| Annealed   | 100%           | 1.72                            | 10.37                   | 234.5                |
| Hard-drawn | 97.3%          | 1.77                            | 10.66                   | 241.5                |
| Aluminum   |                |                                 |                         |                      |
| Hard-drawn | 61%            | 2.83                            | 17.00                   | 228.1                |
| Brass      | 20–27%         | 6.4–8.4                         | 38–51                   | 480                  |
| Iron       | 17.2%          | 10                              | 60                      | 180                  |
| Silver     | 108%           | 1.59                            | 9.6                     | 243                  |
| Sodium     | 40%            | 4.3                             | 26                      | 207                  |
| Steel      | 2–14%          | 12–88                           | 72–530                  | 180–980              |

Fuente: Glover, Sarma y Overbye (2012)

## Resistencia (4)

Efecto de la temperatura sobre la resistencia de una línea de transmisión:



La resistividad y por ende la resistencia aumentan a medida que aumenta la temperatura.

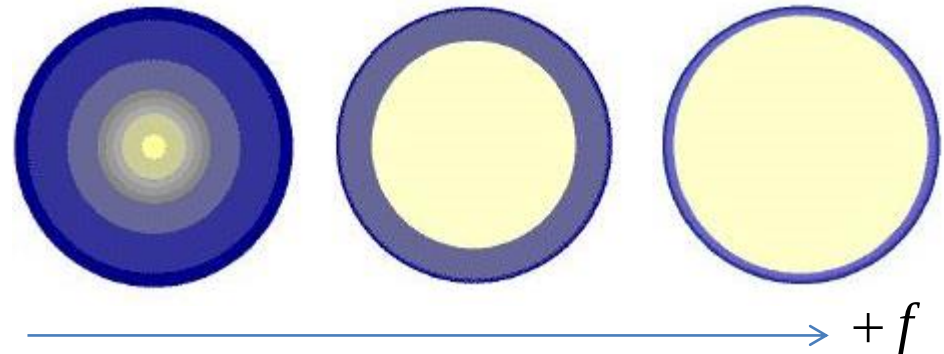
Para conductores dentro del rango de temperaturas de operación, el aumento de la resistencia puede considerarse lineal.

## Resistencia (5)

Efecto piel:

(También conocido como efecto pelicular o efecto Kelvin)

“A medida que aumenta la frecuencia de la corriente alterna, se hace mas pronunciada la diferencia entre las densidades de corriente de las distintas zonas de una sección transversal”  
(Stevenson, 1975)



Fuente: [http://www.ecured.cu/index.php/Archivo:Efecto\\_pelicular.JPG](http://www.ecured.cu/index.php/Archivo:Efecto_pelicular.JPG)

$$R'_{ac} = F_{ep} R_{ac}$$

$$J = J_s e^{-d/\delta} \quad \delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}}$$

## Conductancia

También llamada perditancia. Modela la corriente que puede circular entre conductores o entre estos y los apoyos.

$$G = \frac{P_{loss}}{V^2} [S]$$

La conductancia varía según la humedad atmosférica. En una línea bien aislada y un clima seco es prácticamente nula.

Sólo se tendrá en cuenta en un estudio riguroso de líneas de transmisión.

| Con tiempo | Conductancia                                                                         |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Seco       | $G_K = \text{desde } 1 \times 10^{-8} \text{ hasta } 10 \times 10^{-8} \text{ S/km}$ |
| Húmedo     | $G_K = \text{hasta } 30 \times 10^{-8} \text{ S/km}$                                 |

Fuente: Checa (1988)

## Inductancia (1)

- La inductancia o coeficiente de autoinducción es el parámetro dominante del circuito equivalente de una línea de transmisión en alta tensión.
- Se define como la relación entre el flujo enlazado o concatenado por el circuito o conductor y la corriente que pasa por este.

$$L = \frac{\lambda}{i} = \frac{N\Phi}{i} [H]$$

- Para un circuito o conductor con permeabilidad magnética constante, la inductancia se puede obtener determinando:
  - La intensidad de campo magnético  $H$  por la ley de Ampere.
  - La densidad de flujo magnético  $B$ .
  - El flujo concatenado.
  - La inductancia es el flujo concatenado por amperio.

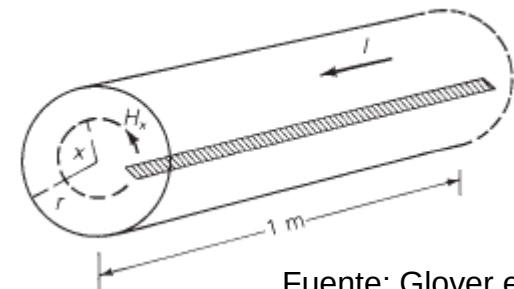
## Inductancia (2)

### Inductancia de un conductor cilíndrico sólido

- Por simplicidad se asumen las siguientes simplificaciones:
  - El conductor es lo suficientemente largo para despreciar los efectos en las puntas.
  - El conductor es no magnético, por lo tanto la permeabilidad es:  $\mu_0$
  - Tiene una densidad de corriente uniforme (se desprecia el efecto piel).
- En el **interior del conductor**, por Ley de Ampere:

$$\oint H_{\text{tan}} dl = I_{\text{encerrada}}$$

$$H_x (2\pi x) = I_x \quad \text{para } x < r$$



Fuente: Glover et al (2012)



## Inductancia de un conductor cilíndrico sólido (1)

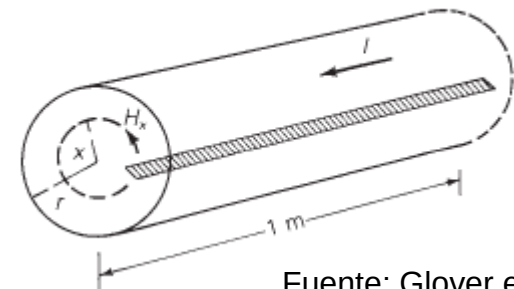
$$H_x = \frac{I_x}{2\pi x} \text{ [A/m]}$$

Como la distribución de corriente es uniforme en el conductor:

$$I_x = \left(\frac{x}{r}\right)^2 I \quad \text{para } x < r \quad \longrightarrow \quad H_x = \frac{xI}{2\pi r^2} \text{ [A/m]}$$

La densidad de flujo magnético es:

$$B_x = \mu_0 H_x = \frac{\mu_0 x I}{2\pi r^2} \text{ [Wb/m}^2\text{]}$$



Fuente: Glover et al (2012)

## Inductancia de un conductor cilíndrico sólido (2)

El flujo diferencial por unidad de longitud de conductor en el rectángulo sombreado es:

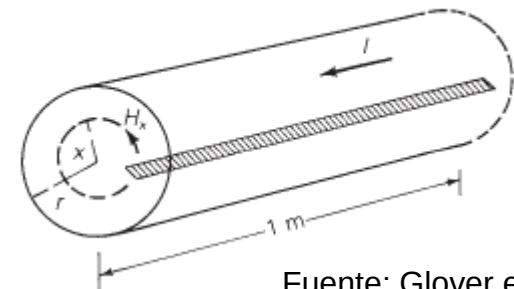
$$d\Phi = B_x dx \left[ \frac{\text{Wb}}{\text{m}} \right]$$

El flujo concatenado por este rectángulo de conductor, es una fracción del flujo total, esto es:

$$d\lambda = \left( \frac{x}{r} \right)^2 d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^4} x^3 dx \left[ \frac{\text{Wb} \cdot \text{v}}{\text{m}} \right]$$

$$\lambda_{\text{int}} = \int_0^r d\lambda = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^4} \int_0^r x^3 dx = \frac{\mu_0 I}{8\pi} = \frac{1}{2} \times 10^{-7} I$$

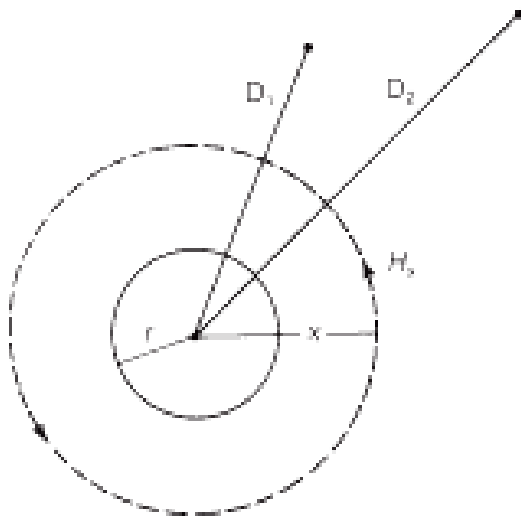
$$L_{\text{int}} = \frac{\lambda_{\text{int}}}{I} = \frac{\mu_0}{8\pi} = \frac{1}{2} \times 10^{-7} \left[ \frac{\text{H}}{\text{m}} \right]$$



Fuente: Glover et al (2012)

## Inductancia de un conductor cilíndrico sólido (3)

Ahora bien, entre dos puntos en el **exterior del conductor**:



$$H_x = \frac{I}{2\pi x} \text{ [A/m]} \quad \rightarrow \quad B_x = \mu_0 H_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \text{ [Wb/m}^2\text{]}$$

$$d\Phi = B_x dx = 2 \times 10^{-7} \frac{I}{x} dx \text{ [Wb.v/m]}$$

$$d\lambda = d\Phi$$

Toda la corriente es concatenada por el flujo en el exterior del conductor

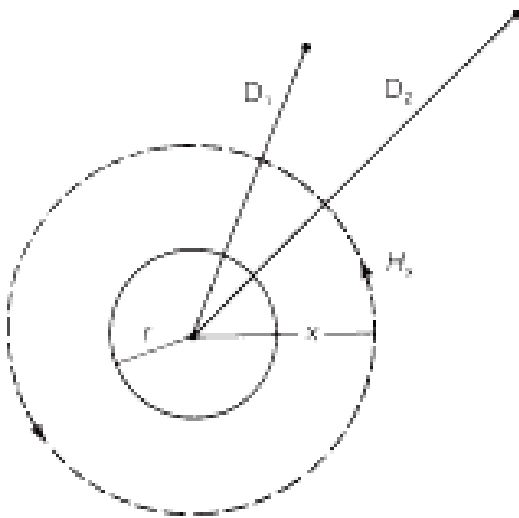
Fuente: Glover et al (2012)

$$\lambda_{12} = \int_{D_1}^{D_2} d\lambda = 2 \times 10^{-7} I \int_{D_1}^{D_2} \frac{dx}{x} = 2 \times 10^{-7} I \ln \left( \frac{D_2}{D_1} \right) \text{ [Wb.v/m]}$$

## Inductancia de un conductor cilíndrico sólido (4)

La inductancia externa debido al flujo concatenado entre  $D_1$  y  $D_2$  es:

$$L_{12} = \frac{\lambda_{12}}{I} = \int_{D_1}^{D_2} d\lambda = 2 \times 10^{-7} \ln \left( \frac{D_2}{D_1} \right) \left[ \text{H/m} \right]$$



El flujo total concatenado en un punto a una distancia  $D$  del centro del conductor es la suma del flujo interno y el flujo externo:

$$\lambda_p = \frac{1}{2} 10^{-7} I + 2 \times 10^{-7} I \ln \left( \frac{D}{r} \right) = 2 \times 10^{-7} I \ln \frac{D}{e^{-1/4} r}$$

Fuente: Glover et al (2012)

$$\lambda_p = 2 \times 10^{-7} I \ln \frac{D}{r'}$$



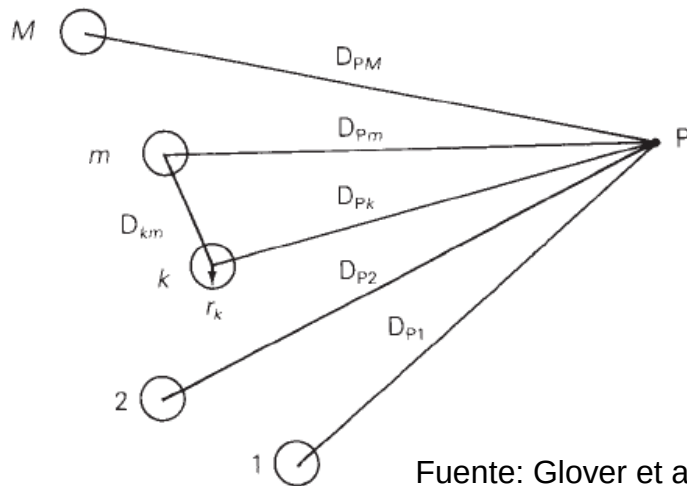
$$L_p = \frac{\lambda_p}{I} = 2 \times 10^{-7} \ln \left( \frac{D}{r'} \right)$$

$$r' = e^{-1/4} r = 0,7788r$$

## Enlaces de flujo concatenado de un grupo de conductores

- Considerando un arreglo de  $M$  conductores cilíndricos en los cuales circulan corrientes cuya sumatoria es nula:

$$I_1 + I_2 + \dots + I_M = \sum_{m=1}^M I_m = 0$$



Fuente: Glover et al (2012)

Se puede demostrar que el flujo concatenado del conductor  $k$  cuando el punto  $P$  tiende al infinito es:

$$\lambda_k = 2 \times 10^{-7} \sum_{m=1}^M I_m \ln \left( \frac{1}{D_{km}} \right) \left[ \text{Wb.v/m} \right]$$

Rev.

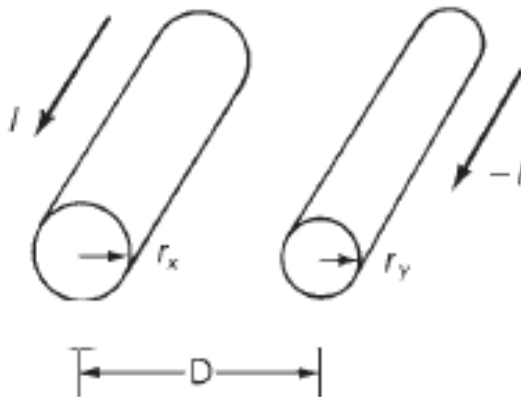
## Inductancia de una línea monofásica de dos conductores

- El resultado anterior se puede emplear para obtener el flujo concatenado y la inductancia de una línea monofásica conformada por dos conductores.

$$\lambda_x = 2 \times 10^{-7} \left( I_x \ln \frac{1}{D_{xx}} + I_y \ln \frac{1}{D_{xy}} \right) = 2 \times 10^{-7} \left( I \ln \frac{1}{r'_x} - I \ln \frac{1}{D} \right) = 2 \times 10^{-7} I \ln \frac{D}{r'_x}$$

$$\lambda_y = -2 \times 10^{-7} I \ln \frac{D}{r'_y}$$

$$\left[ r'_x = e^{-1/4} r_x = 0,7788 r \right]$$



$$L_x = \frac{\lambda_x}{I_x} = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r'_x}$$

$$L_y = \frac{\lambda_y}{I_y} = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r'_y}$$

Inductancia total o “de lazo”

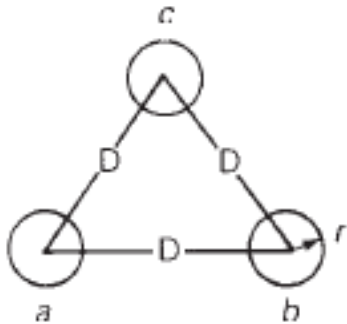
$$L = L_x + L_y = 2 \times 10^{-7} \left( \ln \frac{D}{r'_x} + \ln \frac{D}{r'_y} \right)$$

$$= 4 \times 10^{-7} \left( \ln \frac{D}{\sqrt{r'_x r'_y}} \right)$$

Fuente: Glover et al (2012)

## Inductancia de una línea trifásica

Suponiendo que el espaciamiento entre conductores es equilátero y las corrientes son balanceadas:



Fuente: Glover et al (2012)

$$\begin{aligned}\lambda_a &= 2 \times 10^{-7} \left( I_a \ln \frac{1}{r'} + I_b \ln \frac{1}{D} + I_c \ln \frac{1}{D} \right) \\ &= 2 \times 10^{-7} \left( I_a \ln \frac{1}{r'} - I_a \ln \frac{1}{D} \right) \\ &= 2 \times 10^{-7} \left( I_a \ln \frac{D}{r'} \right)\end{aligned}$$

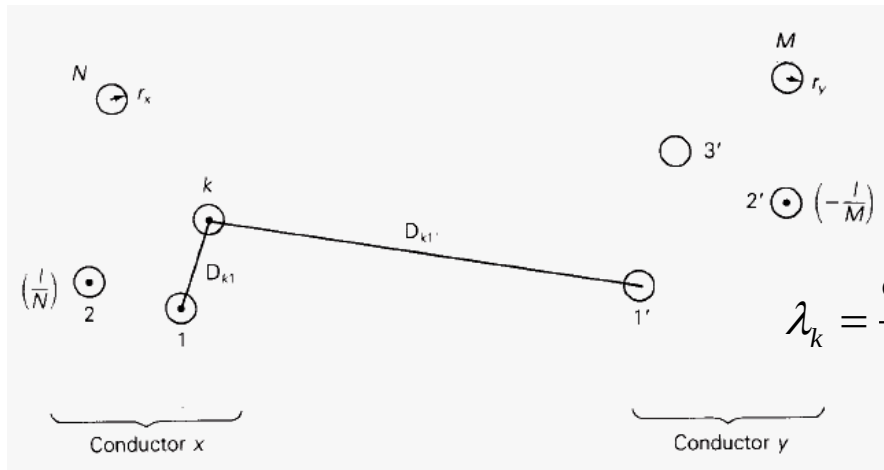
$$I_a + I_b + I_c = 0$$

$$L_a = \frac{\lambda_a}{I_a} = 2 \times 10^{-7} \left( \ln \frac{D}{r'} \right)$$

Debido a la simetría se obtiene el mismo resultado para las demás fases.

## Inductancia de conductores compuestos (1)

- Los conductores compuestos están formados por dos o mas hilos subconductores en paralelo.
- Por simplicidad se estudiará el caso en el que los hilos son de igual radio y conducen corrientes iguales.



$$\Phi_k = 2 \times 10^{-7} I \left[ \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \ln \frac{1}{D_{km}} - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \ln \frac{1}{D_{km}} \right]$$

$$\lambda_k = \frac{\Phi_k}{N} = 2 \times 10^{-7} I \left[ \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \ln \frac{1}{D_{km}} - \frac{1}{NM} \sum_{m=1}^M \ln \frac{1}{D_{km}} \right]$$

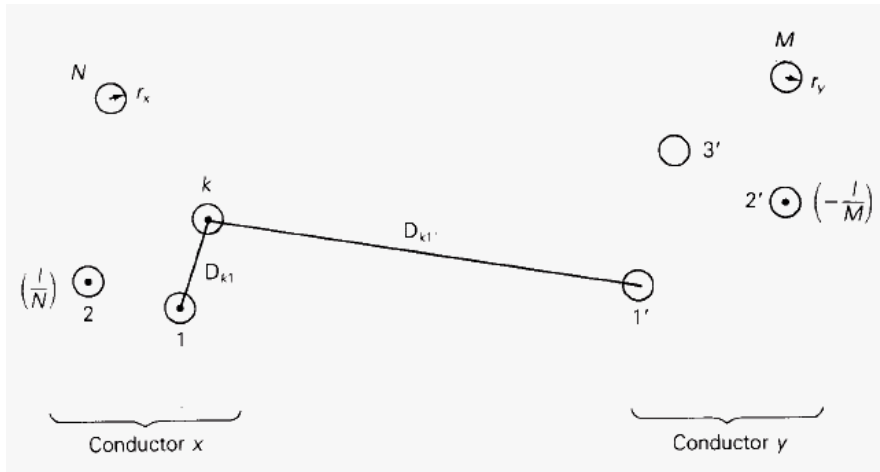
Fuente: Glover et al (2012)

$$\lambda_x = \sum_{k=1}^N \lambda_k = 2 \times 10^{-7} I \sum_{k=1}^N \left[ \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \ln \frac{1}{D_{km}} - \frac{1}{NM} \sum_{m=1}^M \ln \frac{1}{D_{km}} \right]$$



## Inductancia de conductores compuestos (2)

- Escribiéndolo de otra manera, el flujo concatenado por el conductor x es:



$$\lambda_x = 2 \times 10^{-7} I \ln \prod_{k=1}^N \frac{\left( \prod_{m=1}^M D_{km} \right)^{1/NM}}{\left( \prod_{m=1}^N D_{km} \right)^{1/N^2}}$$

$$\lambda_x = 2 \times 10^{-7} I \ln \frac{D_{xy}}{D_{xx}}$$

$$D_{xy} = \left( \prod_{k=1}^N \prod_{m=1}^M D_{km} \right)^{1/MN}$$

$$D_{xx} = \left( \prod_{k=1}^N \prod_{m=1}^M D_{km} \right)^{1/N^2}$$

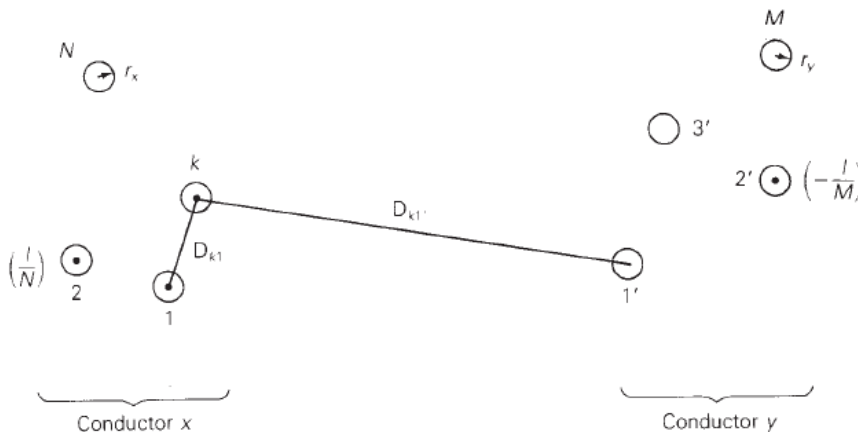
$$\ln A^\alpha = \alpha \ln A$$

$$\sum \ln A_k = \ln \prod A_k$$

Rev.

## Inductancia de conductores compuestos (3)

- Finalmente la inductancia del conductor x es:



$$L_x = \frac{\lambda_x}{I} = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_{xy}}{D_{xx}} \quad [H/m]$$

De la misma manera, se obtiene la inductancia del conductor y:

$$L_y = \frac{\lambda_y}{I} = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_{xy}}{D_{yy}} \quad [H/m]$$

La inductancia del circuito monofásico sería:

$$L = L_x + L_y$$

$D_{xy}$  : Distancia Media Geométrica (*GMD*)

$D_{xx}, D_{yy}$  : Radio Medio Geométrico (*GMR*)

Estos valores generalmente son datos proporcionados por los fabricantes.

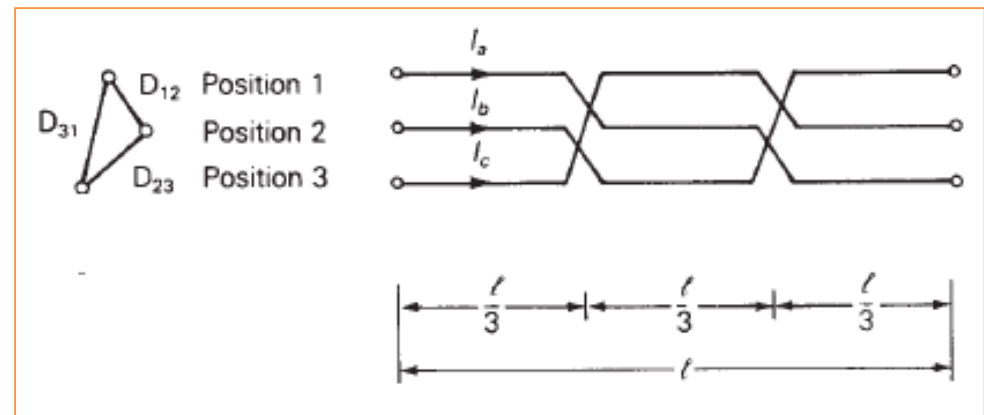
## Inductancia de una línea trifásica (1)

- Cuando el espaciamiento entre conductores no es equilátero:

$$\lambda_{a1} = 2 \times 10^{-7} \left[ I_a \ln \frac{1}{D_s} + I_b \ln \frac{1}{D_{12}} + I_c \ln \frac{1}{D_{31}} \right]$$

$$\lambda_{a2} = 2 \times 10^{-7} \left[ I_a \ln \frac{1}{D_s} + I_b \ln \frac{1}{D_{23}} + I_c \ln \frac{1}{D_{12}} \right]$$

$$\lambda_{a3} = 2 \times 10^{-7} \left[ I_a \ln \frac{1}{D_s} + I_b \ln \frac{1}{D_{31}} + I_c \ln \frac{1}{D_{32}} \right]$$



Fuente: Glover et al (2012)

$$\begin{aligned} \lambda_a &= \frac{1}{l} \left[ \lambda_{a1} \left( \frac{l}{3} \right) + \lambda_{a2} \left( \frac{l}{3} \right) + \lambda_{a3} \left( \frac{l}{3} \right) \right] = \frac{\lambda_{a1} + \lambda_{a2} + \lambda_{a3}}{3} \\ &= \frac{2 \times 10^{-7}}{3} \left[ 3I_a \ln \frac{1}{D_s} + I_b \ln \frac{1}{D_{12} D_{23} D_{31}} + I_c \ln D_{31} \right] \end{aligned}$$

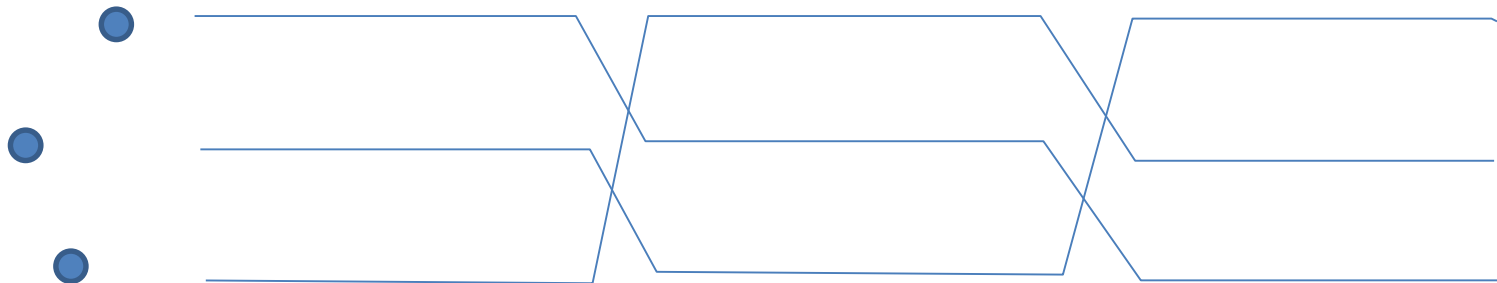
Los conductores son idénticos  
con  $GMR = D_s$

Rev.

## Inductancia de una línea trifásica (2)

Cuando el espaciamiento entre conductores no es equilátero:

- Si los espaciamientos entre conductores son desiguales, entonces los encadenamientos de flujo son desiguales para corrientes balanceadas.
- Como los flujos concatenados por fase son desiguales, las inductancias son desiguales.
- Sin embargo, el balance se puede mantener mediante el intercambio de las posiciones de los conductores a lo largo de la línea, técnica conocida como **transposición**.

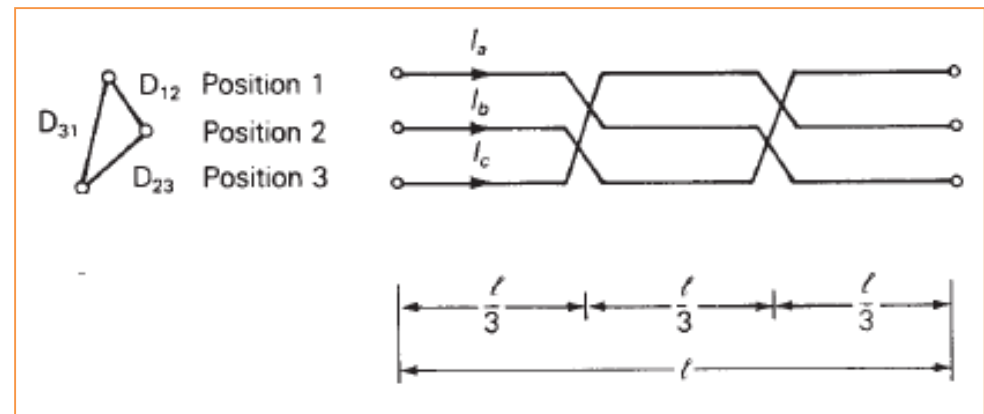


## Inductancia de una línea trifásica (3)

Usando  $(I_b + I_c) = -I_a$

$$\lambda_a = \frac{2 \times 10^{-7}}{3} \left[ 3I_a \ln \frac{1}{D_s} - I_a \ln \frac{1}{D_{12} D_{23} D_{31}} \right]$$

$$\lambda_a = 2 \times 10^{-7} I_a \ln \frac{\sqrt[3]{D_{12} D_{23} D_{31}}}{D_s}$$



Fuente: Glover et al (2012)

Entonces, la inductancia promedio es:

$$L_a = \frac{\lambda_a}{I_a} = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{\sqrt[3]{D_{12} D_{23} D_{31}}}{D_s}$$

$$L_a = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_{eq}}{D_s}$$

Se obtienen resultados similares para las otras fases.

## Ejemplo:

A completely transposed 60-Hz three-phase line has flat horizontal phase spacing with 10 m between adjacent conductors. The conductors are 1,590,000 cmil ACSR with 54/3 stranding. Line length is 200 km. Determine the inductance in H and the inductive reactance in  $\Omega$ .

**SOLUTION** From Table A.4, the GMR of a 1,590,000 cmil 54/3 ACSR conductor is

$$D_S = 0.0520 \text{ ft} \frac{1 \text{ m}}{3.28 \text{ ft}} = 0.0159 \text{ m}$$

Also, from (4.6.17) and (4.6.18),

$$D_{eq} = \sqrt[3]{(10)(10)(20)} = 12.6 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} L_a &= 2 \times 10^{-7} \ln \left( \frac{12.6}{0.0159} \right) \frac{\text{H}}{\text{m}} \times \frac{1000 \text{ m}}{\text{km}} \times 200 \text{ km} \\ &= 0.267 \text{ H} \end{aligned}$$

The inductive reactance of phase  $a$  is

$$X_a = 2\pi f L_a = 2\pi(60)(0.267) = 101 \text{ } \Omega$$







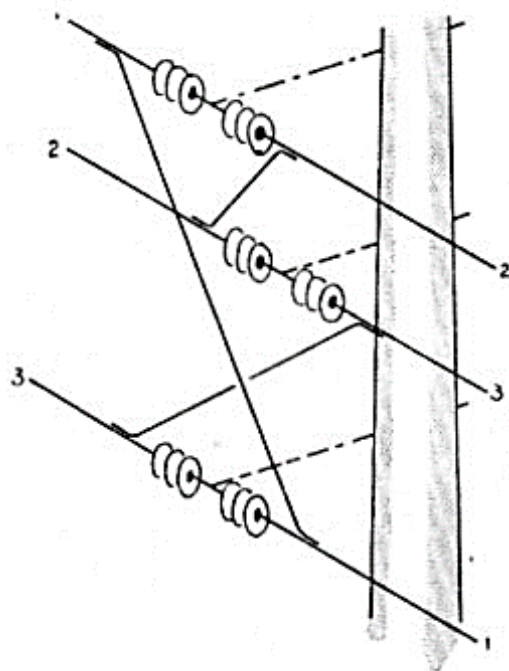
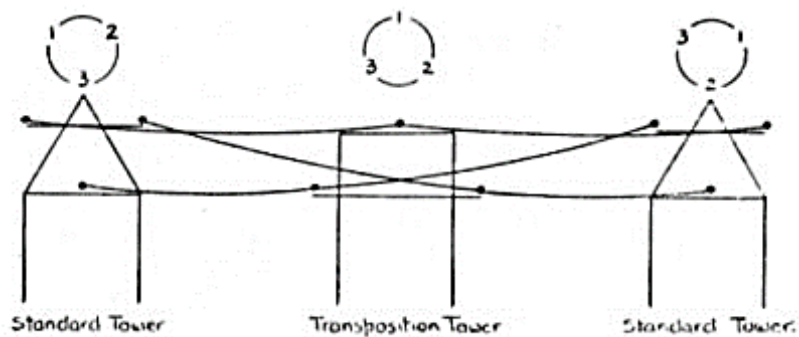
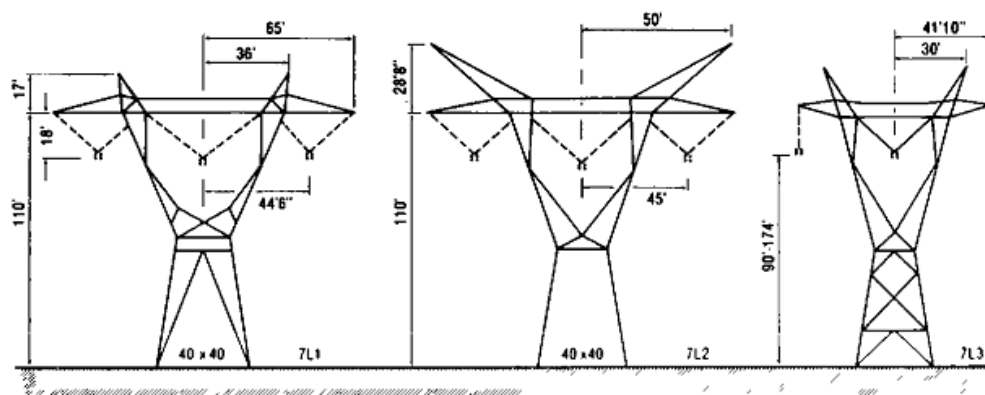
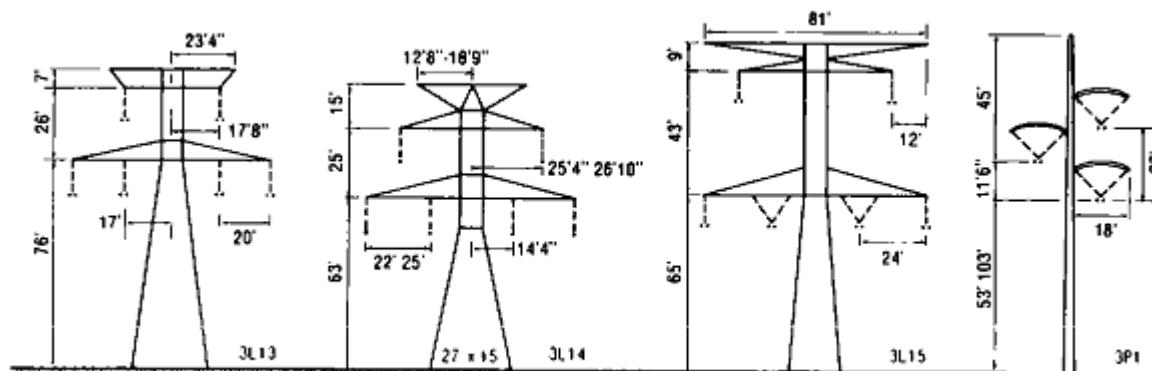
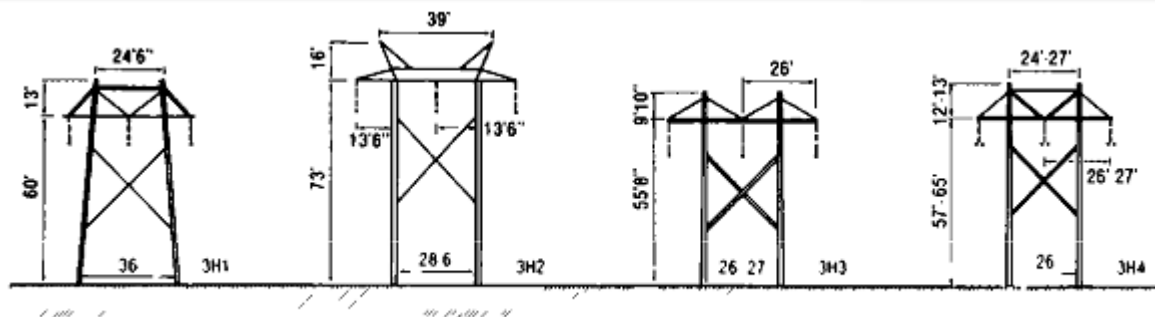


FIG. 9.5.—TWO METHODS OF TRANSPOSITION.

Fuente: Cotton, H. (1988)



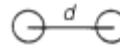


Fuente: Gönen, T. (1988)

## Inductancia de varios conductores agrupados

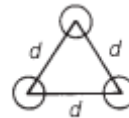
- Es común el uso de varios conductores por fase. Esto reduce el campo eléctrico en la superficie de los conductores.
- El agrupamiento de conductores por fase ayuda a reducir el efecto corona y con ello reduce las pérdidas indeseadas, interferencias con las comunicaciones y el ruido audible.

$$D_{SL} = \sqrt[4]{(D_S \times d)^2} = \sqrt{D_S d}$$

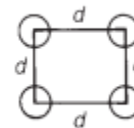


$$L_a = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_{eq}}{D_{SL}} \quad \left[ \frac{\text{H}}{\text{m}} \right]$$

$$D_{SL} = \sqrt[9]{(D_S \times d \times d)^3} = \sqrt[3]{D_S d^2}$$



$$D_{SL} = \sqrt[16]{(D_S \times d \times d \times d \sqrt{2})^4} = 1,091 \sqrt[4]{D_S d^3}$$



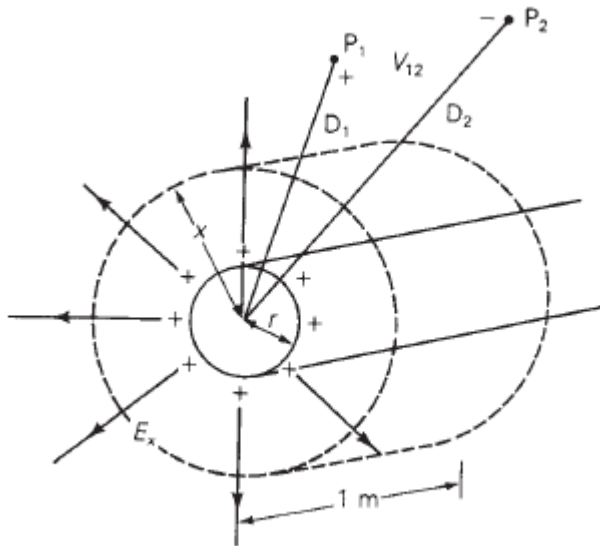
## Cálculo de la capacitancia

- La capacitancia permite modelar las pérdidas de la línea por el almacenamiento de energía en forma de campo eléctrico.
- El campo eléctrico presente en una línea viene dado por la diferencia de potencial que existe entre conductores. Esta diferencia de potencial hace que los conductores se carguen de la misma forma que las placas paralelas de un capacitor.
- La capacitancia entre conductores se obtiene determinando:
  - La intensidad de campo eléctrico mediante la Ley de Gauss.
  - Tensión entre los conductores
  - Capacitancia que es la carga por unidad de tensión.
- Según la ley de Gauss:

$$\oiint D_p dS = \oiint \varepsilon E_p dS = Q_{enc}$$

# Campo eléctrico de un conductor largo y recto

- Para un conductor cilíndrico sólido:
  - Se asume que el conductor es lo suficiente largo para despreciar los efectos en las puntas y que la densidad de carga es constante..
  - En el interior del conductor, el campo eléctrico es nulo.



Usando la ley de Gauss:

$$\oiint \varepsilon E_p dS = Q_{enc}$$

$$\varepsilon E_x (2\pi x)(1) = q(1)$$

$$E_x = \frac{q}{2\pi\varepsilon x}$$

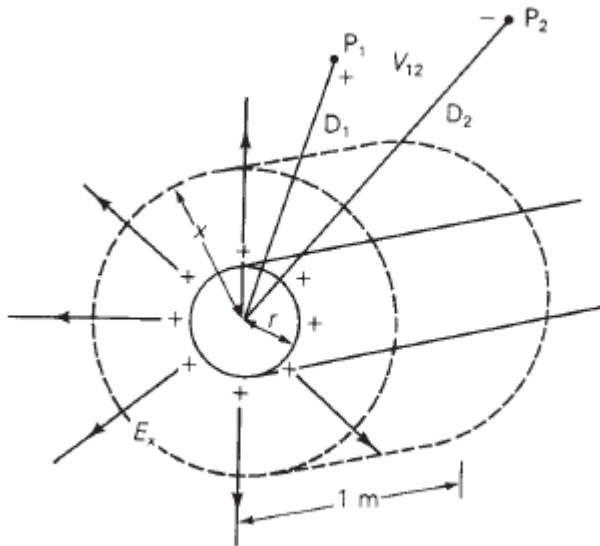
En el espacio libre:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \quad \left[ \frac{F}{m} \right]$$

En el aire:  $\varepsilon \cong \varepsilon_0$

## Tensión eléctrica en un conductor largo y recto

- Las superficies equipotenciales son cilindros concéntricos alrededor del conductor.
- La diferencia de potencial entre dos puntos a distancias  $D_1$  y  $D_2$ :



$$V_{12} = \int_{D_1}^{D_2} E_x dx$$

$$V_{12} = \int_{D_1}^{D_2} \frac{q}{2\pi\epsilon x} dx = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D_2}{D_1} \quad [\text{V}]$$

Esta es valida para corriente directa o corriente alterna. En corriente alterna sinusoidal, la carga se puede expresar en forma fasorial.

## Tensión eléctrica en un arreglo de conductores

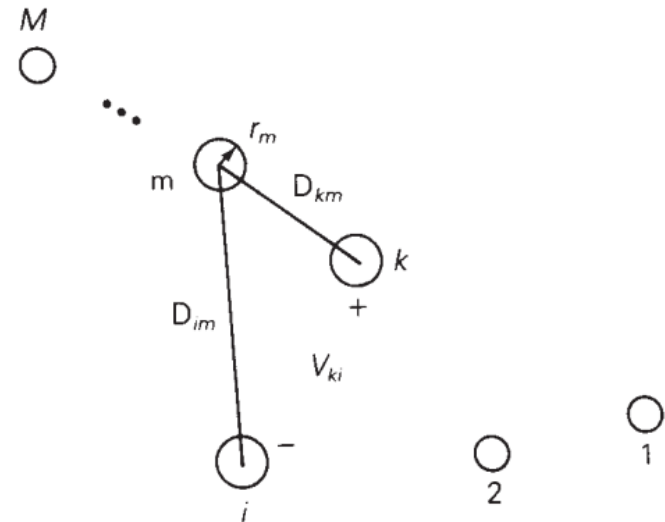
- Aplicando lo anterior a un arreglo de M conductores cilíndricos:

$$V_{kim} = \frac{q_m}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D_{im}}{D_{km}} \quad [\text{V}]$$

Se desprecia la distorsión en la vecindad de un conductor debido a otros conductores.

Usando superposición, la tensión entre los conductores k e i debido a todos los conductores es:

$$V_{ki} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \sum_{m=1}^M q_m \ln \frac{D_{im}}{D_{km}} \quad [\text{V}]$$



## Capacitancia de una línea monofásica de dos conductores

- Suponiendo que los conductores están alimentados mediante una fuente de tensión de manera que el conductor x tiene una carga uniforme  $q$ , por conservación de la energía, el conductor y tiene una carga igual pero negativa.

$$V_{xy} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[ q \ln \frac{D_{yx}}{D_{xx}} - q \ln \frac{D_{yy}}{D_{xy}} \right]$$

$$= \frac{q}{2\pi\epsilon} \left[ \ln \frac{D_{yx} D_{xy}}{D_{xx} D_{yy}} \right]$$

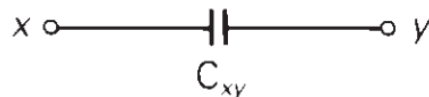
$$D_{xy} = D_{yx} = D$$

$$D_{xx} = r_x$$

$$D_{yy} = r_y$$

$$V_{xy} = \frac{q}{\pi\epsilon} \left[ \ln \frac{D}{\sqrt{r_x r_y}} \right]$$

$$C_{xy} = \frac{q}{V_{xy}} = \frac{\pi\epsilon}{\ln \left( \frac{D}{\sqrt{r_x r_y}} \right)}$$

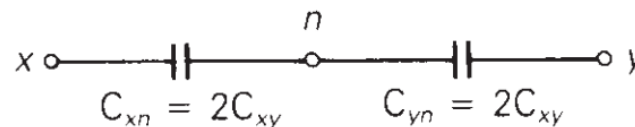


(a) Line-to-line capacitance

$$C_{xy} = \frac{\pi\epsilon}{\ln \left( \frac{D}{r} \right)}$$

## Capacitancia de una línea monofásica de dos conductores (con neutro)

- Si la línea de dos conductores se alimenta de un transformador que tiene una derivación central a tierra, la tensión entre cada conductor y tierra es la mitad de la tensión entre los dos conductores:



(b) Line-to-neutral capacitances

$$V_{xn} = V_{yn} = \frac{V_{xy}}{2}$$

$$C_n = C_{xn} = C_{yn} = \frac{q}{V_{xn}} = 2C_{xy}$$

$$C_n = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{D}{r}\right)} \left[ \frac{F}{m} \right]$$



# Capacitancia de una línea trifásica con espaciamiento equilateral

- La tensión entre los conductores a y b es:

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[ q_a \ln \frac{D_{ba}}{D_{aa}} + q_b \ln \frac{D_{bb}}{D_{ab}} + q_c \ln \frac{D_{bc}}{D_{ac}} \right]$$

$$D_{aa} = D_{bb} = r$$

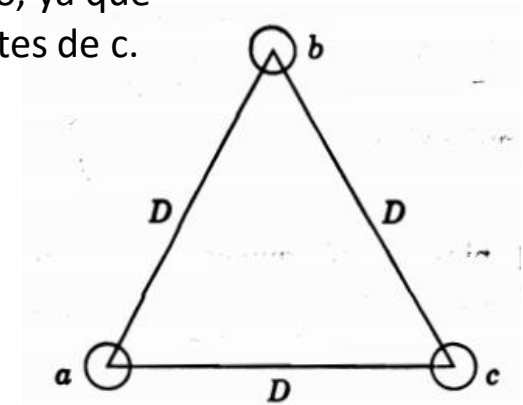
$$D_{ab} = D_{ba} = D_{cb} = D_{ca} = D$$

$$\begin{aligned} V_{ab} &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[ q_a \ln \frac{D}{r} + q_b \ln \frac{r}{D} + q_c \ln \frac{D}{D} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[ q_a \ln \frac{D}{r} + q_b \ln \frac{r}{D} \right] \end{aligned}$$

En este caso el tercer término se hace cero, ya que a y b son equidistantes de c.  
 $\ln(1)=0$

De la misma manera se obtiene la tensión entre a y c:

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[ q_a \ln \frac{D}{r} + q_c \ln \frac{r}{D} \right]$$



# Capacitancia de una línea trifásica con espaciamiento equilátero

- Las cargas y las tensiones son sinusoidales y se pueden operar como fasores. Además, se desprecia el efecto de la tierra en la capacitancia.

$$\left. \begin{aligned} V_{ab} &= \sqrt{3}V_{an} \angle 30^\circ = \sqrt{3}V_{an} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right] \\ V_{ac} &= \sqrt{3}V_{an} \angle -30^\circ = \sqrt{3}V_{an} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} \right] \end{aligned} \right\} V_{ab} + V_{ac} = 3V_{an}$$

$$V_{an} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2\pi\epsilon} \right) \left[ 2q_a \ln \frac{D}{r} + (q_b + q_c) \ln \frac{r}{D} \right]$$

Por la simetría de la línea se obtienen los mismos resultados para cada una de las fases.

$$q_a + q_b = -q_a$$

$$V_{an} = \left( \frac{1}{2\pi\epsilon} \right) q_a \ln \frac{D}{r}$$

$$C_{an} = \frac{q_a}{V_a} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{D}{r}\right)} \quad \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

## Capacitancia de líneas trifásicas con conductores trenzados y distribución de carga no uniforme

- Las expresiones obtenidas hasta ahora suponen que los conductores son cilíndricos sólidos. Para conductores trenzados, la distribución del campo eléctrico externo se ve alterada.



- Sin embargo, en la práctica se tiende a despreciar el efecto del trenzado del conductor sobre la capacitancia ya que los errores son lo bastante pequeños.
- Por otra parte, se ha supuesto que la distribución de la carga es uniforme por el conductor.
- Puede demostrarse que la no uniformidad de la distribución de carga en el conductor se puede despreciar en líneas aéreas, ya que el error es lo suficientemente pequeño.

## Capacitancia de líneas trifásicas con espaciamiento asimétrico

- En líneas con espaciamiento asimétrico se debe hacer transposición para poder mantener el balance en los parámetros.
- De tal manera de que cada fase ocupe una posición por un tercio del recorrido de la línea.
- La capacitancia es:

$$C_{an} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{D_{eq}}{r}\right)} \quad \frac{\text{F}}{\text{m}}$$

$$\text{donde: } D_{eq} = \sqrt[3]{D_{ab}D_{bc}D_{ac}}$$

## Capacitancia de una línea trifásica con conductores agrupados

- Se asume que los conductores en cada grupo comparten las cargas equitativamente.
- Además, los espaciamientos entre fases son mucho mayores que los espaciamientos entre conductores del grupo.

$$\begin{aligned}
 V_{ab} &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[ \frac{q_a}{2} \ln \frac{D_{ba}}{D_{aa'}} + \frac{q_a}{2} \ln \frac{D_{ba'}}{D_{aa'}} + \frac{q_b}{2} \ln \frac{D_{bb}}{D_{ab}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{q_b}{2} \ln \frac{D_{bb'}}{D_{ab'}} + \frac{q_c}{2} \ln \frac{D_{bc}}{D_{ac}} + \frac{q_c}{2} \ln \frac{D_{bc'}}{D_{ac'}} \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[ \frac{q_a}{2} \left( \ln \frac{D_{ab}}{r} + \ln \frac{D_{ab}}{d} \right) + \frac{q_b}{2} \left( \ln \frac{r}{D_{ab}} + \ln \frac{d}{D_{ab}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{q_c}{2} \left( \ln \frac{D_{bc}}{D_{ac}} + \ln \frac{D_{bc'}}{D_{ac'}} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[ q_a \ln \frac{D_{ab}}{\sqrt{rd}} + q_b \ln \frac{\sqrt{rd}}{D_{ab}} + q_c \ln \frac{D_{bc}}{D_{ac}} \right]
 \end{aligned}$$

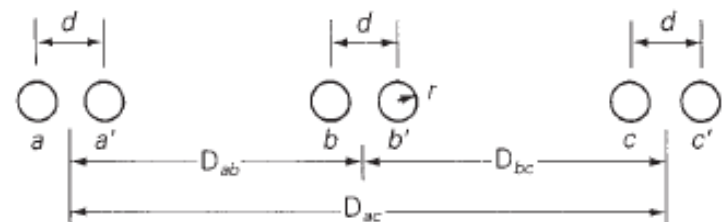
$$C_{an} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(D_{eq}/D_{SC})} \quad \text{F/m}$$

$$D_{SC} = \sqrt{rd} \quad \text{for a two-conductor bundle}$$

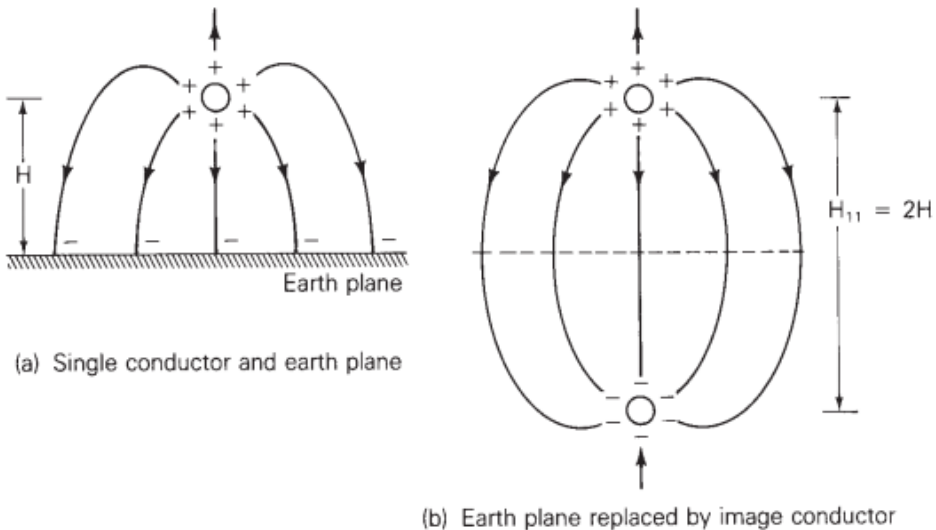
Similarly,

$$D_{SC} = \sqrt[3]{rd^2} \quad \text{for a three-conductor bundle}$$

$$D_{SC} = 1.091 \sqrt[4]{rd^3} \quad \text{for a four-conductor bundle}$$



## Efecto del suelo sobre la capacitancia

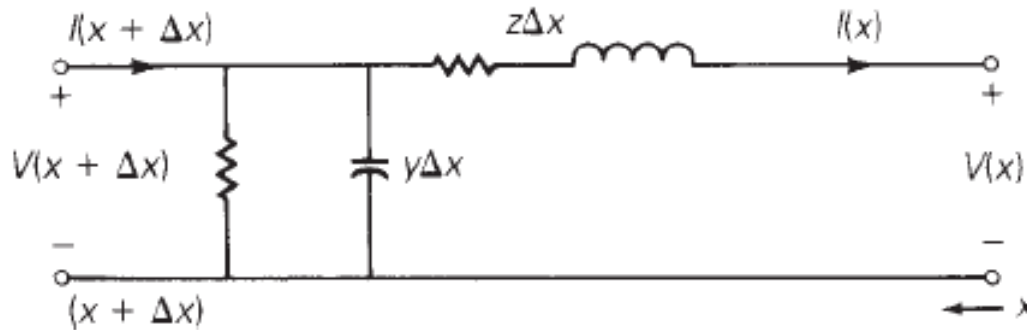
- Si se supone que el suelo es un conductor perfecto, con la forma de un plano con extensión infinita, el campo eléctrico de los conductores se ve afectado por su presencia.
- 
- (a) Single conductor and earth plane
- (b) Earth plane replaced by image conductor
- “Al cargar el conductor, las cargas van desde la tierra para residir en él y hay una diferencia de potencial entre el conductor y el suelo o tierra. Esta última tiene una carga igual en magnitud a la del conductor pero de signo opuesto.” (Grainger y Stevenson, 1996)
  - Para tomar en cuenta este efecto se utiliza el método de las imágenes.

# Contenido

- Introducción
- Modelo general de las líneas de transmisión
- Parámetros eléctricos de las líneas de transmisión
- Cálculo de los parámetros eléctricos
- Operación de una línea de transmisión en estado estable
- Flujo de potencia en una línea de transmisión
- Transitorios en líneas de transmisión
- Conclusiones

## Operación de líneas de transmisión en estado estable

- Para analizar la operación en estado estable de las líneas de transmisión se puede emplear el modelo general formulado por Heaviside.



$$z = R + j\omega L \quad \Omega/\text{m}$$

$$y = G + j\omega C \quad \text{S/m}$$

Aplicando ley de Kirchhoff para voltajes:

$$V(x + \Delta x) = V(x) + (z\Delta x)I(x)$$

$$\frac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x} = zI(x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x} = \frac{dV(x)}{dx}$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = zI(x)$$

Aplicando ley de Kirchhoff para corrientes:

$$I(x + \Delta x) = I(x) + (y\Delta x)V(x + \Delta x)$$

$$\frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = yV(x + \Delta x)$$

$$\frac{dI(x)}{dx} = yV(x)$$



# Operación de líneas de transmisión en estado estable

$$\frac{dV(x)}{dx} = zI(x)$$

$$\frac{dI(x)}{dx} = yV(x)$$

Ecuaciones diferenciales  
lineales homogéneas de  
primer orden.

Constantes de integración

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} - zyV(x) = 0$$



$$V(x) = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x}$$

$$\left[ \gamma = \sqrt{zy} \quad \text{m}^{-1} \right]$$

Constante de  
propagación

$$\frac{dV(x)}{dx} = \gamma A_1 e^{\gamma x} - \gamma A_2 e^{-\gamma x} = zI(x)$$

$$I(x) = \frac{A_1 e^{\gamma x} - A_2 e^{-\gamma x}}{z/\gamma} = \frac{A_1 e^{\gamma x} - A_2 e^{-\gamma x}}{Z_c}$$

$$\left[ Z_c = \frac{z}{\gamma} = \sqrt{\frac{z}{y}} \quad \Omega \right]$$

Impedancia  
característica

# Operación de líneas de transmisión en estado estable

- Resolviendo las constantes de integración:

$$A_1 = \frac{V_R + Z_C I_R}{2} \quad V(0) = V_R$$

$$A_1 = \frac{V_R - Z_C I_R}{2} \quad I(0) = I_R$$

$$V(x) = \left( \frac{V_R + Z_C I_R}{2} \right) e^{\gamma x} + \left( \frac{V_R - Z_C I_R}{2} \right) e^{-\gamma x} = \left( \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \right) V_R + Z_C \left( \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \right) I_R$$

$$I(x) = \left( \frac{V_R + Z_C I_R}{2Z_C} \right) e^{\gamma x} - \left( \frac{V_R - Z_C I_R}{2Z_C} \right) e^{-\gamma x} = \frac{1}{Z_C} \left( \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \right) V_R + \left( \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \right) I_R$$

Utilizando las funciones hiperbólicas:

$$V(x) = \cosh(\gamma x) V_R + Z_C \sinh(\gamma x) I_R$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_C} \sinh(\gamma x) V_R + \cosh(\gamma x) I_R$$

# Operación de líneas de transmisión en estado estable

- En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} V(x) \\ I(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & D(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

$$A(x) = D(x) = \cosh(\gamma x)$$

$$B(x) = Z_c \sinh(\gamma x) \quad \Omega$$

$$C(x) = \frac{1}{Z_c} \sinh(\gamma x) \quad S$$

En el punto final de la línea:

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

where

$$A = D = \cosh(\gamma l) \quad \text{per unit}$$

$$B = Z_c \sinh(\gamma l) \quad \Omega$$

$$C = \frac{1}{Z_c} \sinh(\gamma l) \quad S$$

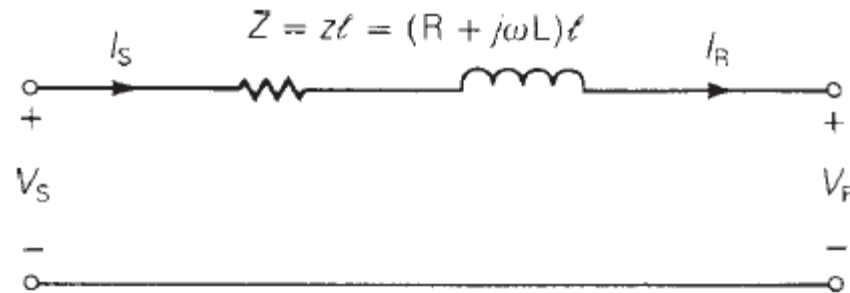
## Operación de líneas de transmisión en estado estable

- Los parámetros ABCD son exactos y validos para cualquier longitud de línea.

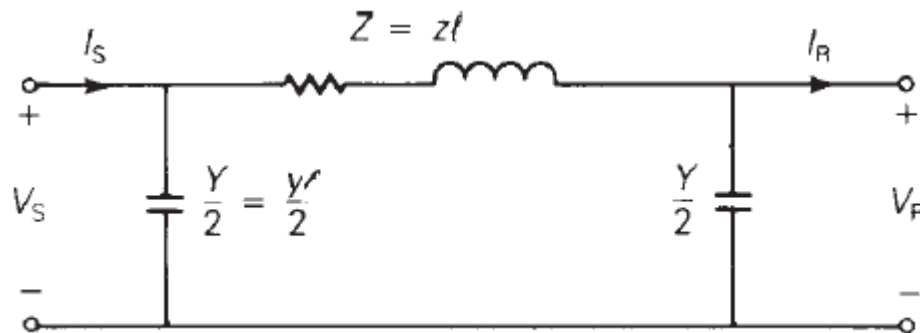
| Parameter                                             | $A = D$                                   | $B$                           | $C$                                                                      |
|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| Units                                                 | per Unit                                  | $\Omega$                      | S                                                                        |
| Short line (less than 80 km)                          | 1                                         | $Z$                           | 0                                                                        |
| Medium line—nominal $\pi$ circuit (80 to 250 km)      | $1 + \frac{YZ}{2}$                        | $Z$                           | $Y \left( 1 + \frac{YZ}{4} \right)$                                      |
| Long line—equivalent $\pi$ circuit (more than 250 km) | $\cosh(\gamma \ell) = 1 + \frac{Y'Z'}{2}$ | $Z_c \sinh(\gamma \ell) = Z'$ | $(1/Z_c) \sinh(\gamma \ell)$<br>$= Y' \left( 1 + \frac{Y'Z'}{4} \right)$ |
| Lossless line ( $R = G = 0$ )                         | $\cos(\beta \ell)$                        | $jZ_c \sin(\beta \ell)$       | $\frac{j \sin(\beta \ell)}{Z_c}$                                         |

## Equivalente $\pi$

- Líneas de longitud corta

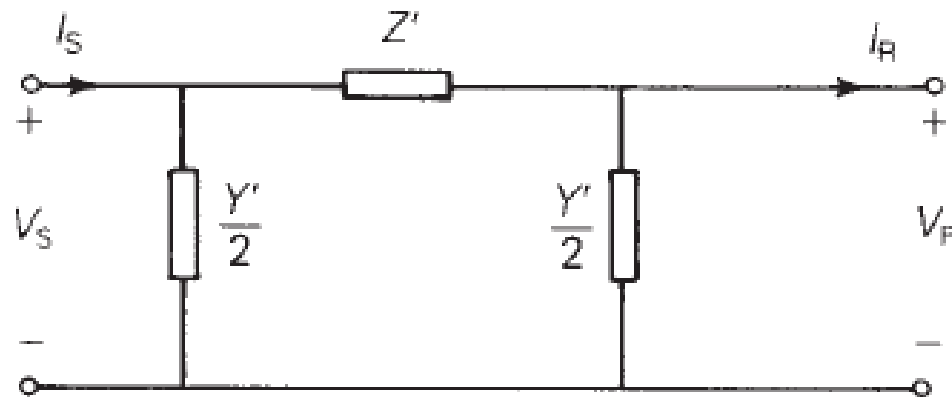


- Líneas de longitud media



## Equivalente $\pi$

- Líneas de longitud larga



$$Z' = Z_c \sinh(\gamma \ell) = Z F_1 = Z \frac{\sinh(\gamma \ell)}{\gamma \ell}$$

$$\frac{Y'}{2} = \frac{\tanh(\gamma \ell / 2)}{Z_c} = \frac{Y}{2} F_2 = \frac{Y \tanh(\gamma \ell / 2)}{(\gamma \ell / 2)}$$

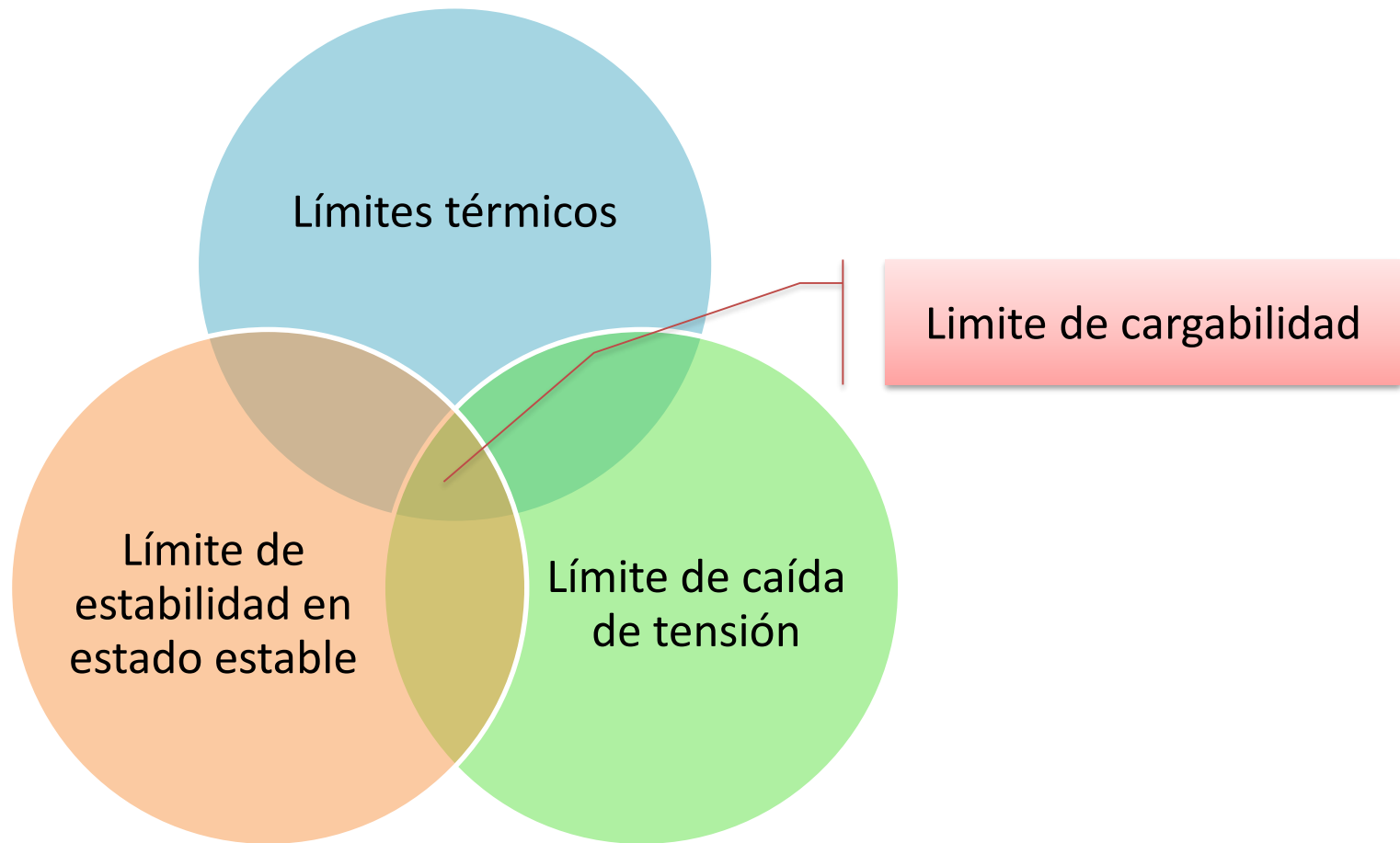
## Regulación de tensión

- La regulación de tensión es el cambio que ocurre en el extremo receptor de la línea cuando pasa de una condición sin carga a máxima carga mientras la tensión en el extremo emisor de la línea permanece constante.

$$\text{percent VR} = \frac{|V_{\text{RNL}}| - |V_{\text{RFL}}|}{|V_{\text{RFL}}|} \times 100$$

- En la practica, las tensiones en las líneas de transmisión decrecen cuando están altamente cargadas e incrementan cuando tienen poca carga.
- En líneas de alta tensión se busca que el voltaje no supere un limite de  $\pm 5\%$  del nominal.
- Es una buena practica considerar una variación en la tensión de 10% en la operación de líneas de transmisión.

# Cargabilidad de las líneas de transmisión





# Contenido

- Introducción
- Modelo general de las líneas de transmisión
- Parámetros eléctricos de las líneas de transmisión
- Cálculo de los parámetros eléctricos
- Operación de una línea de transmisión en estado estable
- Flujo de potencia en una línea de transmisión
- Transitorios en líneas de transmisión
- Conclusiones

## Flujo de potencia en una línea de transmisión

Considerando una línea de transmisión entre dos nodos:



$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \hat{I}_S &= \frac{\bar{D}}{\bar{B}} \hat{V}_S - \frac{1}{\bar{B}} \hat{V}_R \\ \hat{I}_R &= \frac{1}{\bar{B}} \hat{V}_S - \frac{\bar{A}}{\bar{B}} \hat{V}_R \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{A} = A \angle \alpha \\ \bar{B} = B \angle \beta \\ \bar{D} = D \angle \alpha \end{pmatrix}$$

$$\hat{I}_S = \frac{D}{B} V_S \angle (\alpha + \delta - \beta) - \frac{1}{B} V_R \angle -\beta$$

$$\hat{I}_R = \frac{1}{B} V_S \angle (\delta - \beta) - \frac{A}{B} V_R \angle (\alpha - \beta)$$

## Flujo de potencia en una línea de transmisión

Se determina la potencia monofásica en cada extremo:

$$\bar{S}_S = V_S \angle \delta \left[ \frac{D}{B} V_S \angle (-\alpha - \delta + \beta) - \frac{1}{B} V_R \angle \beta \right] = \left[ \frac{D}{B} V_S^2 \angle (\beta - \alpha) - \frac{V_R V_S}{B} \angle (\beta + \delta) \right]$$

$$\bar{S}_R = V_R \left[ \frac{1}{B} V_S \angle (\delta - \beta) - \frac{A}{B} V_R \angle (\alpha - \beta) \right] = \frac{V_R V_S}{B} \angle (\delta - \beta) - \frac{A V_R^2}{B} \angle (\alpha - \beta)$$

En partes real e imaginaria:

$$P_S = \frac{D}{B} V_S^2 \cos(\beta - \alpha) - \frac{V_R V_S}{B} \cos(\beta + \delta)$$

$$Q_S = \frac{D}{B} V_S^2 \sin(\beta - \alpha) - \frac{V_R V_S}{B} \sin(\beta + \delta)$$

$$P_R = \frac{V_R V_S}{B} \cos(\beta - \delta) - \frac{A}{B} V_R^2 \cos(\beta - \alpha)$$

$$Q_R = \frac{V_R V_S}{B} \sin(\beta - \delta) - \frac{A}{B} V_R^2 \sin(\beta - \alpha)$$

## Flujo de potencia en una línea de transmisión

La potencia activa máxima recibida se da para  $\delta = \beta$

$$P_R(\max) = \frac{V_R V_S}{B} - \frac{A}{B} V_R^2 \cos(\beta - \alpha)$$

$\beta$  { En el caso de las líneas de longitud media y corta este ángulo es el de la impedancia en serie de la línea. }

La correspondiente potencia reactiva:

$$Q_R(\max) = -\frac{A}{B} V_R^2 \sin(\beta - \alpha)$$

## Flujo de potencia en una línea de transmisión

En el caso especial de una línea de longitud corta:  $A = D = 1$   
 $B = Z \angle \theta$

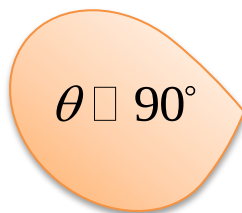
$$P_S = \frac{V_S^2}{Z} \cos \theta - \frac{V_R V_S}{Z} \cos(\theta + \delta)$$

$$P_R = \frac{V_R V_S}{Z} \cos(\theta - \delta) - \frac{V_R^2}{Z} \cos(\theta)$$

$$Q_S = \frac{V_S^2}{Z} \sin \theta - \frac{V_R V_S}{Z} \sin(\theta + \delta)$$

$$Q_R = \frac{V_R V_S}{Z} \sin(\theta - \delta) - \frac{V_R^2}{Z} \sin(\theta)$$

Si se toma en consideración que la resistencia de una línea de transmisión tiende a ser mucho mas pequeña que la reactancia:

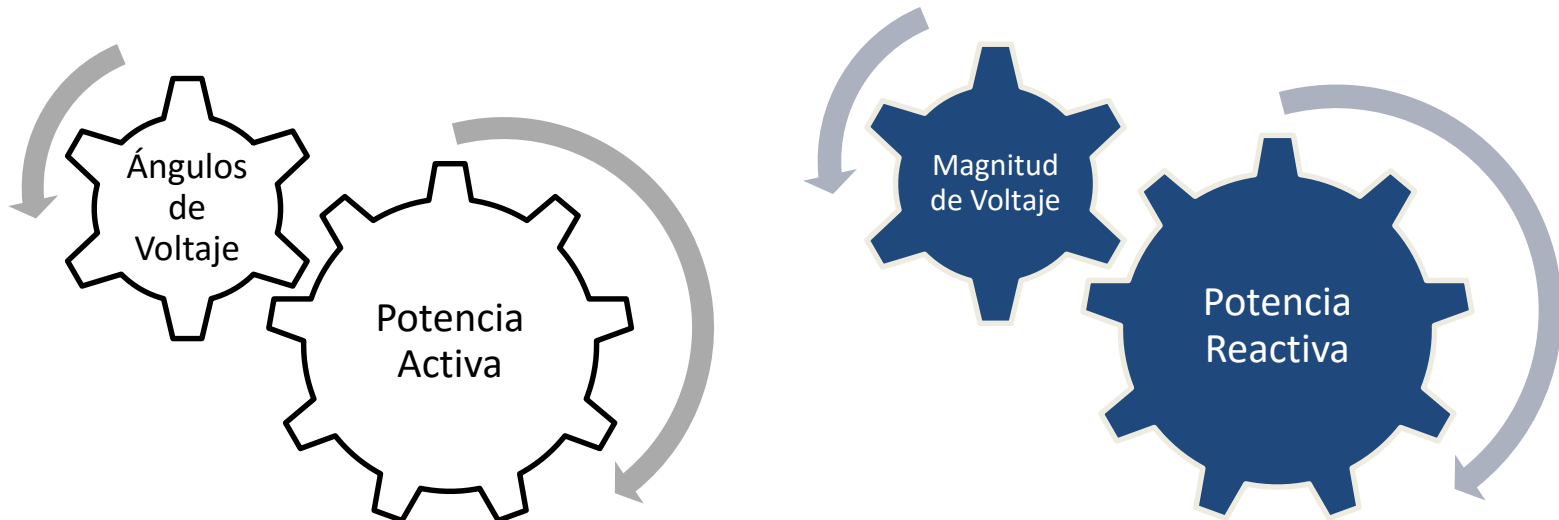


$$P_R = \frac{V_R V_S}{Z} \sin \delta$$

$$Q_R = \frac{V_R V_S}{Z} \cos \delta - \frac{V_R^2}{Z}$$

## Flujo de potencia en una línea de transmisión

- Si la pérdida de potencia activa es pequeña, el flujo de potencia activa tiende a ser proporcional al ángulo de desfasaje entre las tensiones.
- De la misma manera, el flujo de potencia reactiva tiende a ser proporcional a la caída de tensión a lo largo de la línea.



# Contenido

- Introducción
- Modelo general de las líneas de transmisión
- Parámetros eléctricos de las líneas de transmisión
- Cálculo de los parámetros eléctricos
- Operación de una línea de transmisión en estado estable
- Flujo de potencia en una línea de transmisión
- Transitorios en líneas de transmisión
- Conclusiones

## Transitorios en líneas de transmisión (1)

- Un transitorio es “una función aperiódica en el tiempo de corta duración” (Gönen, 1988).
- Ejemplo de transitorios son las sobretensiones o sobrecorrientes, los cuales introducen un cambio súbito en la tensión en un punto del sistema de potencia.
- Las sobretensiones pueden ser causadas por descargas atmosféricas, maniobras o fallas, entre otros eventos.

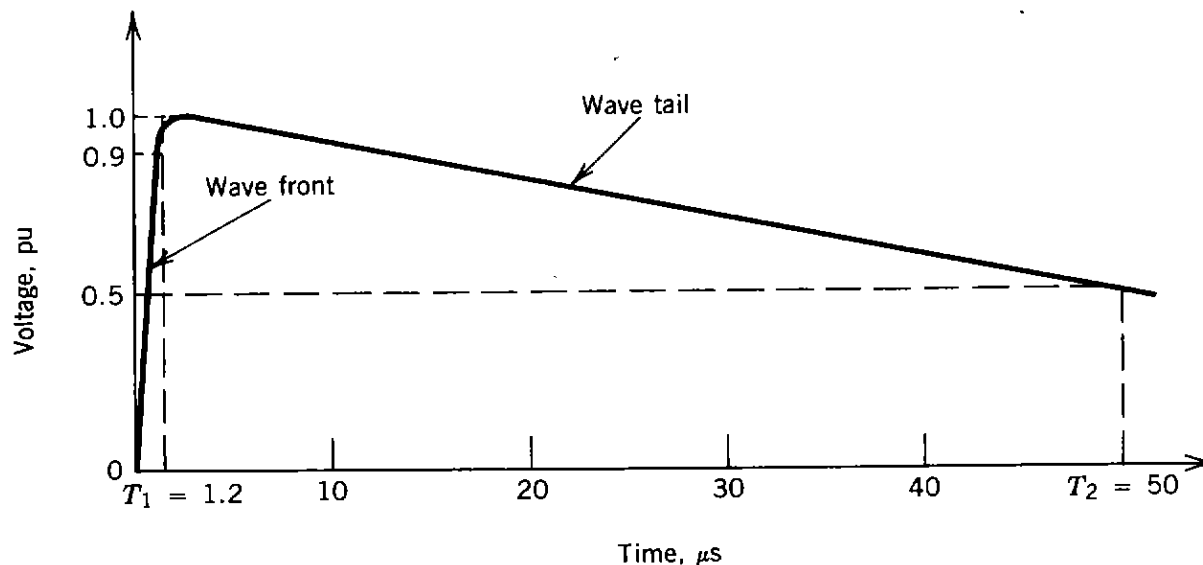


Fuente: <http://www.a2vpe.com/slideshow/lightning-strike/>



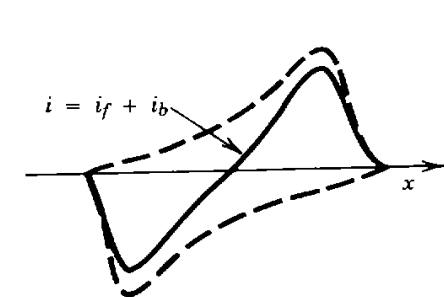
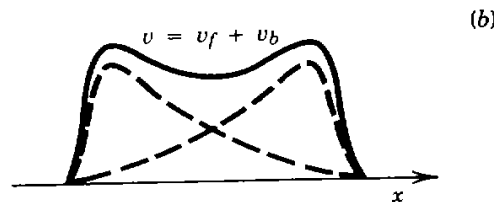
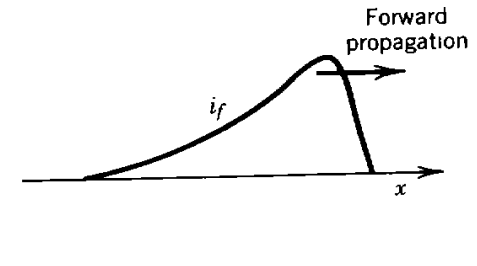
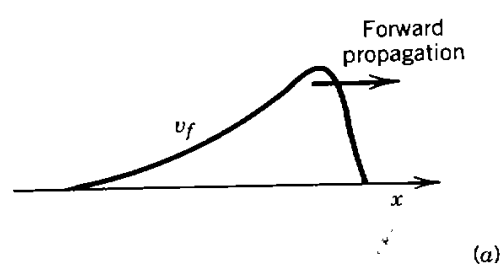
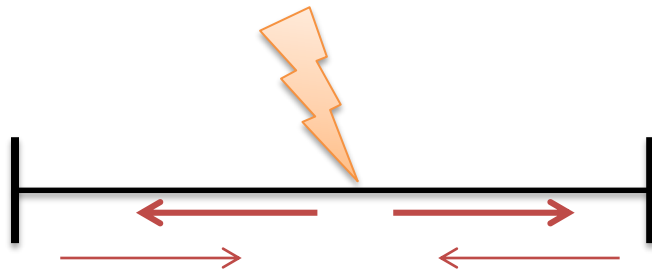
## Transitorios en líneas de transmisión (2)

- Los estudios de perturbaciones en sistemas de transmisión han mostrado que las descargas eléctricas y las maniobras están seguidas de una onda viajera con un frente de onda empinado (*steep wave front*).



- Se requiere estudiar el comportamiento del aislamiento ante tales impulsos de tensión.

## Transitorios en líneas de transmisión (3)

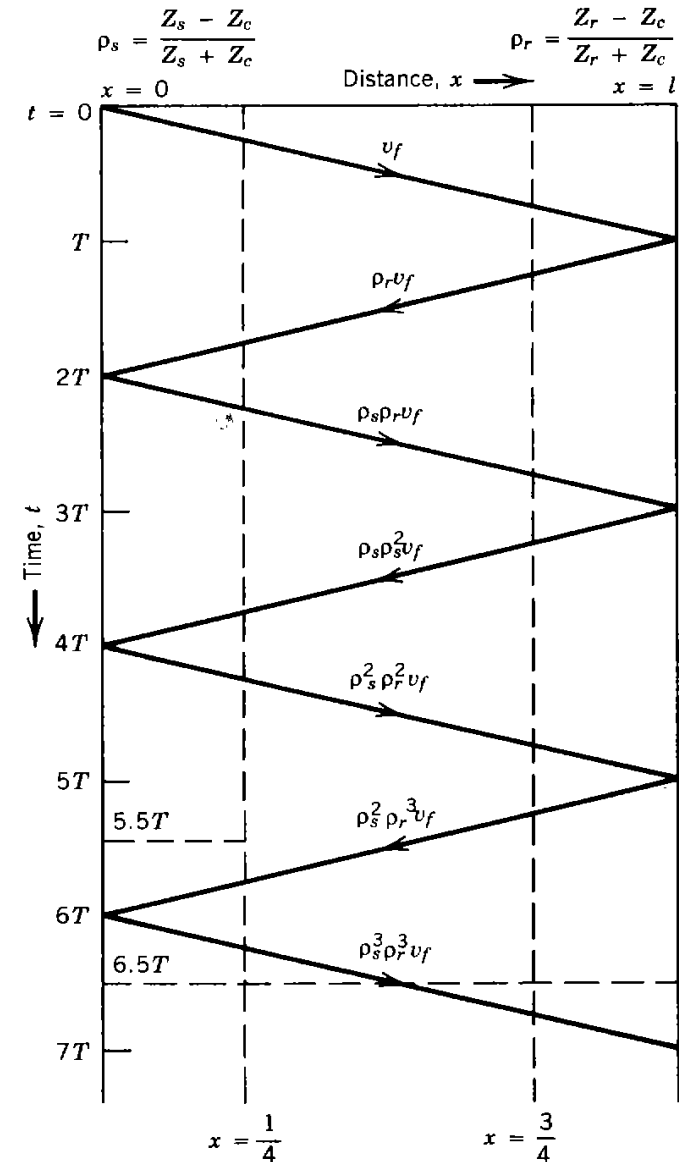
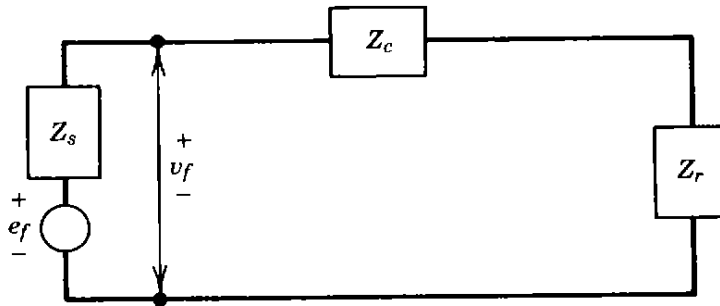


## Transitorios en líneas de transmisión (4)

- Diagrama de celosías (*bounce diagram*):

Es un diagrama desarrollado por Bewley que sirve para determinar la tensión en un punto y tiempo dado de un sistema de transmisión.

Este diagrama permite visualizar las ondas incidente y reflejada en una línea de transmisión sujeta a un evento transitorio.



# Contenido

- Introducción
- Modelo general de las líneas de transmisión
- Parámetros eléctricos de las líneas de transmisión
- Cálculo de los parámetros eléctricos
- Operación de una línea de transmisión en estado estable
- Flujo de potencia en una línea de transmisión
- Transitorios en líneas de transmisión
- Conclusiones

## Conclusiones

- El cálculo de los parámetros de las líneas de transmisión es un proceso complejo, sin embargo, al ser un procedimiento bastante estandarizado, puede realizarse mediante el uso de programas.
- El análisis de la operación de las líneas de transmisión puede simplificarse dependiendo del caso, la geometría y la longitud de la línea.
- La complejidad final dependerá de la rigurosidad del estudio que se quiera realizar.

## Referencias Bibliográficas

- J. Glover, M. Sarma, T. Overbye. Power systems analysis and design. Quinta edición. Cengage Learning. Stamford, 2012.
- J. Grainger, W. Stevenson. Análisis de sistemas de potencia. Primera edición. McGraw Hil. México D.F., 1996.
- D. Kothari, I. Nagrath. Sistemas eléctricos de potencia. Tercera edición. McGraw Hill. México D.F., 2008.
- T. Gönen. Electric power transmission systems engineering Analysis and Design. 1988.
- M. El-Hawary. Introduction to electrical power systems. Primera edición. Wiley. 2008